Fonctions logarithmes - Exercices

TSTI2D

Exercice 1 Déterminer les équations des tangentes à la courbe représentative du logarithme népérien aux points d'abscisses $\frac{1}{2}$, 1 et 2. Tracer ces tangentes et une allure possible de la courbe du logarithme népérien.

Exercice 2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(2x^2+2)$.

1. Déterminer les équations des tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses -1, 0 et 1.
2. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

3. Placer les points de $\mathcal{C}_f$ corresponds aux valeurs précédentes, les tangentes étudiées précédemment, puis l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3 Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes : a) $f(x) = x - 2 - \ln(x)$

b) $f(x) = x\ln(x)$ c) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ d) $f(x) = (\ln(x))^2$ e) $f(x) = (x+1)\ln(x) - x$

f) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+3}{2-x}\right)$ g) $f(x) = 0,2x + 3 - 2,6\ln(x+2)$ h) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 1 - \ln(x)$

i) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x}$ j) $f(x) = (\ln(x))^5$ k) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x+1}$ l) $f(x) = \dfrac{3\ln(x)+1}{\ln(x)}$

Exercice 4 Soit la fonction f définie et dérivable sur $]0;+1[$ par $f(x) = 2\ln(x) + \dfrac{4}{x} - 5$.

1. a) Déterminer graphiquement, à l'aide de la calculatrice, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
2. a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2x-4}{x^2}$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$, et en déduire le sens de variation de f.
3. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.

Exercice 5 Soit la fonction f définie sur $I = \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2}{2x-1}$.

1. Déterminer une primitive F de f sur I.
2. Déterminer la primitive G de f sur I qui s'annule en 5.

Exercice 6 Donner l'expression d'une primitive F des fonctions définies par les expressions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{6x}{3x^2+3}$ b) $f(x) = \dfrac{2}{2x-3}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$ d) $f(x) = \dfrac{24x^2}{-4x^3+2}$ e) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+2}$

f) $f(x) = 3x + 4 + \dfrac{1}{2x+4}$ g) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{2}{x+2}$ h) $f(x) = -\dfrac{5}{x} + \dfrac{3x^2+2}{x^3+2x} - \dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$

Exercice 7 Exprimer, en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$ les valeurs de :

a) $\ln(10)$ b) $\ln(25)$ c) $\ln(16)$ d) $\ln(400)$ e) $\ln\left(\dfrac{2}{25}\right)$ f) $\ln\left(\dfrac{5}{8}\right)$

g) $\ln(0,4)$ h) $\ln(\sqrt{5})$ i) $\ln(2\sqrt{2})$ k) $\ln(5\sqrt{10})$

Exercice 8 Résoudre les équations suivantes :

a) $\ln(x^2-4) = \ln(5) + 2\ln(3)$ b) $\ln(x+2) = 2\ln(x)$ c) $\ln(x) + \ln(x+2) = \ln(9x-12)$

Exercice 9 Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\ln(x-2) \leqslant 0$ b) $\ln(-2x+3) > 0$ c) $\ln(2x+1) - \ln(x+1) < 0$

Exercice 10 Déterminer le plus petit nombre n tel que

a) $1,032^n \geqslant 4$ b) $1,25^n \geqslant 12$ c) $0,92^n \leqslant 0,5$ d) $0,5^n \leqslant 0,1$

Exercice 11 On considère la suite géomtrique (u_n) de raison $q = 1,04$ et de premier terme $u_0 = 1000$.
Déterminer la plus petite valeur de $n$pour que $u_n \geqslant 2000$.

Exercice 12 Déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} + \ln(x)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 5x + \ln(x)$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(x^2+3\right)$ e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^2+3}{x^2+3x+12}\right)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln\left(\frac{2x^2+x-3}{x+126}\right)$ g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln\left(\frac{x^2-3x+2}{x^3-6x}\right)$ h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\ln(x)+3}{\ln(x)-5}$

Exercice 13 À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre e.

Exercice 14 À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la solution de l'équation $\ln(x) = 3$. Vérifier que l'on a $x = e^3$.

Exercice 15 À l'aide de la calculatrice (calculs de valeurs, courbe représentative, tableau de valeurs,...), conjecturer les limites :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x - \ln(x)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln(x)$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\Big(\ln(x)\Big)^4$

Exercice 16 On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x)$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats.
2. Etudier le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 17 Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 + \dfrac{\ln(x)}{x}$ b) $f(x) = x - \ln(x)$ c) $f(x) = x^2 - 6x - \ln(x)$ d) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5\ln(x)$

e) $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x}$ f) $f(x) = \dfrac{\ln(x)+16}{x+6}$ g) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{\ln(x)}$ h) $f(x) = \dfrac{x+1}{\ln(x)+1}$

Exercice 18 **Intensité acoustique en dB et isolation phonique**

L'intensité acoustique en décibels (dB) d'un son est donnée par $L = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$, où I est l'intensité du son étudié et I_0 une intensité de référence (I et I_0 en Watts par mètres carrés, $W.m^{-2}$). On donne $I_0 = 10^{-12}\,W.m^{-2}$.

A. 1. Un haut parleur diffuse de la musique ; l'intensité du son est égale à $10^{-6}\,W.m^{-2}$. Calculer l'intensité acoustique L_1 en dB.
   2. On ajoute un deuxième haut parleur identique au premier, et l'intensité du son double. Calculer l'intensité acoustique en dB correspondante. A-t'on $L_2 = 2L_1$?
   3. On multiplie par 10 l'intensité sonore (ou on utilise 10 haut parleurs identique simultanément). Calculer l'intensité acoustique en dB correspondante.
   4. Le seuil de danger pour l'oreille humaine est à 90 dB. Calculer l'intensité du son correspondante.

B. **Isolation phonique** On dispose de plaques d'isolation phonique permettant d'absorber 8% de l'intensité du son qui lui parvient. Pour concevoir un système d'isolation performant, on superpose ces plaques.
On utilise pour tester notre système d'isolation une source de référence qui émet un son d'intensité 100dB.
   1) Déterminer l'intensité du son après atténuation par une plaque.
   2) Déterminer l'intensité du son après atténuation par deux plaques successives.
   3) On note u_n l'intensité du son mesurée après la traversée de n plaques.
      a) Donner u_0, u_1 et u_2, puis exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
      b) Quelle est la nature de la suite (u_n). En déduire l'expression u_n en fonction de n et u_0.
      c) Quelle intensité sonore obtient'on avec 10 plaques ?
      d) Combien de plaques faut-il utiliser pour que l'intensité du son devienne inférieur à 1dB.